

SIMULATION NUMÉRIQUE PAR ELEMENTS FINIS DES BALLOTTEMENTS D'UN RÉSERVOIR PARTIELLEMENT REPLI DE LIQUIDE

PAR
R. Belakroum^{1, 2}, T. H. Mai¹, M. Kadja², V. Pavel³

Résumé. Le but de cette étude est de prévoir numériquement les ballottements à la surface libre de réservoirs partiellement remplis de liquide. Le comportement non linéaire de la surface libre et l'effet de la viscosité sont pris en considération. Nous employons une formulation Arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE) des équations de Navier Stokes largement utilisée pour le traitement des problèmes présentant des surfaces libres, des frontières mobiles, des grandes déformations ainsi que des interfaces de contact. La méthode numérique utilisée est la méthode des éléments finis stabilisée, dite de Galerkin moindre carré (GLS). Afin de résoudre le problème non linéaire en sa globalité, nous utilisons une procédure partitionnée totalement implicite.

Les résultats de la présente approche sont validés par rapport à des résultats numériques et analytiques disponibles. Les effets de variation de la fréquence d'excitation extérieure harmonique horizontale, de la hauteur relative de la colonne du liquide et de l'inclinaison des parois solides latérales du réservoir ont été étudiés en détail.

Mots clefs: comportement non linéaire, éléments finis stabilisée

1. Introduction

Sous l'influence de charges extérieures, on observe, dans un réservoir partiellement rempli de liquide, l'apparition de fluctuations à la surface libre. L'amplitude de ce mouvement, appelé aussi ballottement, dépend en général de l'excitation extérieure, du niveau et des propriétés physiques du liquide ainsi que de la géométrie du réservoir. Ce mouvement des particules fluides à la surface libre reflète le mouvement du domaine fluide en sa globalité.

Dans la phase de conception d'un réservoir, la prévention de sa stabilité et sa résistance sont des préoccupations d'importance capitale. Le ballottement du liquide est associé à divers applications pratiques et problèmes d'ingénierie, tels que : le comportement des réservoirs de stockage de liquides sur les ponts des navires, le mouvement du combustible liquide dans les avions en vol, la réponse sous l'effet de tremblements de terre des grands réservoirs de stockage de liquide, etc.

Le mouvement de la surface libre cause d'importante charge sur la structure solide si la période du mouvement du réservoir est proche de la période naturelle du fluide dans le réservoir [1]. Le ballonnement du liquide peut être une cause directe à des instabilités inacceptables et même de la rupture fatale du système entier [2].

Le problème en question peut être formulé d'un point de vue physico-mathématique à différents niveaux de complexité. En premier lieu, le problème peut être abordé en considérant que le fluide est non visqueux, incompressible et que l'écoulement est irrotationnel de sorte qu'il existe un potentiel de vitesse satisfaisant l'équation de Laplace [3]. Dans ce cas, à la surface libre, en général, on spécifie des conditions dynamiques et cinématiques linéarisées [4]. En se basant sur cette formulation et sur la théorie des ondes linéaires, *Youn-sun Choun et al.* [5] ont analysé les caractéristiques des ballonnements dans un réservoir rectangulaire avec une structure submergée au fond. *T. Nakayama et al.* [6] ont abordé le problème du ballonnement par la méthode des éléments de frontière en considérant l'effet amortissant de la viscosité du fluide en ajoutant un artifice dite, le terme d'amortissement de Rayleigh, à la condition à la surface libre. Par la méthode des éléments finis *J. R. Cho et al.* [2] ont analysé les caractéristiques de résonance d'un réservoir comprenant des séparateurs horizontaux.

D'autres chercheurs voulant approcher de plus en plus le cas réel, ont choisi d'aborder le problème de ballonnement d'un réservoir, en traitant directement les équations de Navier-Stokes. *Bang-Fuh Chen et al.* [7] ont présenté une méthode se basant sur les différences finie indépendant du temps (time-independent finite-difference method) pour analyser le ballonnement des réservoirs. *J.R. Cho et al.* [8] ont analysé par la méthode des éléments finis le comportement vibratoire des réservoirs comprenant des séparateurs, en utilisant une formulation Arbitrairement Eulerienne Lagrangienne (ALE Arbitrary Lagrangian-Eulerian). Récemment, *Wolfgang et al.* [9] ont traité le problème d'interaction fluide-structure, en présence d'une surface libre, par la méthode des éléments finis et les équations de Navier-Stokes en formulation ALE. Dans cette dernière étude les auteurs ont proposé le traitement de la région fluide proche de la surface libre comme étant une partie distincte et de résoudre le problème par une procédure partitionnée fortement couplée.

Dans le présent travail nous avons entrepris la discrétisation des équations de Navier Stokes en configuration ALE par le biais de la méthode des éléments finis stabilisée dite Galerkin moindre carré (GLS). Une technique se basant sur une approche pseudo élastique est utilisée pour déformer le maillage non structuré à chaque pas de temps et cela afin de traquer le mouvement des particules fluides à la surface libre. Pour résoudre le problème non linéaire en sa globalité, nous avons utilisé une méthode partitionnée totalement implicite en utilisant des itérations de Gauss-Seidel par bloc (BGS).

En se rapprochant des conditions de résonance d'un réservoir et même si l'amplitude de l'excitation extérieure est très faible, une amplification catastrophique des amplitudes des ballottements est observée. En soucis de contribuer à la caractérisation de la réponse vibratoire des réservoirs partiellement remplis de liquide, nous avons réalisé les investigations numériques suivantes :

- a) Une analyse fréquentielle des ballottements dans un réservoir de forme rectangulaire soumis à une excitation horizontale et sinusoïdale à sa base.
- b) L'étude de l'influence de la hauteur relative de la colonne du liquide.
- c) La détermination de l'influence de l'inclinaison des parois latérales.

Une intension particulière est donnée à l'influence des différents paramètres considérés sur les valeurs des fréquences fondamentales, des élévations relatives maximales, de la largeur de bande de résonance ainsi qu'à la topographie de la surface libre.

2. Description du domaine fluide

2.1. Modèle mathématique

Afin d'éviter la complexité du traitement des conditions aux limites dans le cas des frontières mobiles, nous considérons un référentiel se déplaçant avec le réservoir.

La formulation arbitrairement Lagrangienne Eulérienne (ALE acronyme Arbitrary Lagrangian Eulerian) est bien adaptée pour la modélisation mathématique des problèmes présentant une surface libre. Pour un fluide Newtonien et incompressible les équations de Navier Stokes en configuration ALE se présentent comme suit [10]

$$(1a) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + C \cdot \nabla U - \nu \nabla (\nabla U + \nabla U^T) + \nabla P = f, \text{ dans } \Omega_f(t);$$

$$(1b) \quad \nabla U = 0, \text{ dans } \Omega_f(t);$$

où U , P , f , ν et $\Omega_f(t)$ sont respectivement la vitesse d'écoulement, la pression reliée à la densité du fluide, forces de masse, viscosité cinématique et le domaine fluide.

$$(1c) \quad C = U - U_m.$$

La vitesse convective, C , est la différence entre la vitesse des particules U est la vitesse du maillage U_m .

Afin de formuler un problème mathématiquement bien posé, on doit compléter les équations de Navier Stokes avec les conditions aux limites et initiales.

Les conditions aux limites types consistent à imposer une valeur U_D à la vitesse sur une portion des frontières notée Γ_D .

$$(1d) \quad U = U_D \text{ sur } \Gamma_D(t),$$

E une condition de traction sur la partie de la frontière complémentaire ,
 Γ_h ,

$$(1e) \quad \left[pI - \mu(\nabla U + \nabla U^T) \right] n = h \text{ sur } \Gamma_h(t),$$

où p , μ et n sont, respectivement, la pression, la viscosité dynamique et la normale extérieure de la frontière.

En plus du système d'équations (1) ci-dessus, nous avons besoin de définir les équations régissant le mouvement du maillage.

2.2. Mouvement du maillage

2.2.1. Approche pseudo élastique

Dans le cas d'une configuration ALE, il est nécessaire de définir le mouvement du maillage. Ce dernier est considéré comme étant un domaine pseudo élastique avec un module de Young arbitraire et un coefficient de Poisson nul [11]. Les déplacements aux nœuds des éléments sont obtenus par la résolution du système élasto-statique suivant:

$$(2a) \quad K_m X_m = 0 \text{ dans } \Omega_m,$$

$$(2b) \quad X_m = X_0 \text{ sur } \Gamma^{libre}.$$

La matrice de rigidité élémentaire du système pseudo élastique est exprimée comme suit [13]

$$(3) \quad K_m = \sum_e \int_{\Omega_e} B^T D B |J|^e \tau_m^e d\Omega,$$

où B est la matrice dérivée des fonctions de forme, D la matrice constitutive, $|J|^e$ le Jacobien de l'élément et τ_m^e le facteur de rigidité élémentaire pour un maillage mobile.

Pour le calcul du facteur τ_m^e on utilise le schéma proposé par *A. Masud* [12], [13], qui est basé sur la taille de l'élément.

$$(4) \quad \tau_m^e = I + \frac{|J_{max}| - |J_{min}|}{|J|^e},$$

où $|J_{max}|$ et $|J_{min}|$ sont respectivement, le Jacobien maximum et minimum parmi les éléments du maillage. La méthode consiste essentiellement à augmenter la rigidité des petits éléments afin d'empêcher leurs distorsion.

2.2.2. Condition cinématique à la surface libre

A la surface libre les composantes normales des vitesses du maillage et des particules fluides doivent être égales. Cela se traduit par l'expression suivante :

$$(5) \quad U_0 n = U_m n, \text{ sur } \Gamma^{\text{libre}}.$$

Les deux approches standard utilisées pour l'introduction de cette condition sont l'approche Lagrangienne locale et la méthode de la fonction d'élévation ou de hauteur. Dans une configuration Lagrangienne locale, les nœuds du maillage sont attachés aux particules fluides. Par conséquent, nous avons à la surface libre la condition

$$(6) \quad U_0 - U_m = 0, \text{ sur } \Gamma^{\text{libre}}.$$

La vitesse du maillage est utilisée par la suite pour incrémenter sa position

$$(7) \quad X_m^{n+1} = X_m^n + U_m^n \Delta t, \text{ sur } \Gamma^{\text{libre}}.$$

La facilité d'implémentation et son applicabilité pour des géométries complexes sont les points forts de cette approche. Néanmoins, la présence d'importante vitesse tangentielle à la surface libre, comme dans le cas de canaux ouverts, engendre d'importante distorsion dans les éléments du maillage ce qui affecte considérablement les résultats.

Afin de surmonter les inconvénients de l'approche Lagrangienne, l'utilisation de la méthode des fonctions d'élévations [9] est une alternative très fréquente. Cependant cette dernière méthode présente un déficit lors de l'étude des problèmes à frontières inclinées. C'est pour cette raison, que nous avons adopté dans la présente étude, une approche Lagrangienne locale.

3. Méthode numérique

3.1. Discrétisation par éléments finis

A cause de la nature non linéaire du problème étudié, la linéarisation du système d'équations (1) est nécessaire afin de pouvoir numériquement résoudre les équations gouvernant l'écoulement. Le terme traduisant le transport convectif, $U \cdot \Delta U$ est linéarisé par $U_k \cdot \Delta U_{k+1}$ avec la méthode de substitution successive connue pour ses bonnes propriétés de convergence concernant les équations de Navier Stokes.

Le terme de dérivé temporelle est discrétisé en utilisant le schéma d'Euler décalé arrière

$$(8) \quad \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|^{n+1} = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t},$$

où U^n et U^{n+1} sont successivement les vitesses à l'instant t_n et t_{n+1} .

La forme discrète des équations gouvernant l'écoulement est réalisée par l'utilisation de la méthode des éléments finis basée sur une formulation stabilisée dite de Galerkin moindre carrée (GLS, acronyme Galerkin Least Square) [14]. Cette formulation satisfait les conditions LBB (Ladyzhenskaya - Babuska - Brezzi) et permet l'utilisation des éléments hybrides avec un ordre d'interpolation de la pression et de la vitesse égal [15].

La forme faible des équations de Navier Stokes s'écrit : pour f, U_D et des conditions de traction aux frontières h ; trouver le champ de vitesse $U \in \Phi_u^h$ et le champ de pression $P \in \Phi_p$ tels que pour toutes fonctions $(v, q) \in (\Phi^h \times \Phi_p)$.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_f} \left(\frac{U}{\Delta t} + (U_k - U_m) \nabla U \right) v d\Omega + \int_{\Omega_f} v (\nabla U + \nabla U^T) / \nabla v d\Omega \\
& - \int_{\Omega_f} P \nabla v d\Omega + \sum_e \int_{\Omega_e} \tau^{GLS} \left[\left(\frac{U}{\Delta t} + (U_k - U_m) \nabla U \right) + \right. \\
(9a) \quad & \left. v \nabla (\nabla U + \nabla U^T) - \nabla P \right] \cdot \left[(U_k - U_m) \nabla U + v \nabla (\nabla U + \nabla U^T) \right. \\
& \left. - \nabla q \right] d\Omega = \int_{\Omega_f} \left(f + \frac{U_n}{\Delta t} \right) v d\Omega + \sum_e \int_{\Omega_e} \tau^{GLS} \left(f + \frac{U_n}{\Delta t} \right) + \left[(U_k - U_m) \nabla v \right. \\
& \left. + v \nabla (\nabla v + \nabla v^T) - \nabla q \right] d\Omega + \int_{\Gamma_h} h v d\Gamma
\end{aligned}$$

$$(9b) \quad \Phi_U^h := \left\{ U \in \frac{H^1(\Omega_F^E)}{U} = U_D \right\} \quad \text{on}$$

$$\{\Gamma_D\} \Phi^h := \left\{ v \in \frac{H^1(\Omega_F^E)}{v} = 0 \right\} \text{ on } \{\Gamma_D\} \text{ et } \Phi_p := L^2.$$

Pour des besoins de clarté U_{k+1}^{n+1} est notée U . Nous avons aussi défini U^n comme étant la vitesse au pas de temps précédent t_n et U_k la vitesse à l'itération non linéaire précédente. Le paramètre de stabilisation de la formulation GLS est défini comme suit [14]:

$$(10) \quad \tau^{GLS} = \left[\left(\frac{1}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2 \cdot U_h}{h_e} \right)^2 + 9 \left(\frac{4\nu}{h_e^2} \right)^2 \right]^{-1/2},$$

avec : h_e Taille locale de l'élément ;

U_h Vitesse local.

3.2. Résolution du problème couplé non linéaire

Les systèmes d'équations (2) et (9) forment un problème non linéaire fortement couplé. Ce dernier peut s'écrire sous la forme suivante

(11a) $(U, P) = F((U, P); (X_m, U_m))$ - sous problème fluide,

(11b) $(X_m, U_m) = M((X_m, U_m); (X_0, U_0))$ - mise à jour du maillage,

où M et F définit, respectivement, le sous domaine pseudo élastique décrivant le mouvement du maillage et le sous domaine fluide. Aussi, U, P, X_m, U_m, X_0 et U_0 sont respectivement la vitesse des particules fluides, la pression, le déplacement du maillage, la vitesse du maillage, le déplacement et la vitesse du maillage à la surface libre. Pour résoudre le problème non linéaire couplé (11) nous avons utilisé des itérations Gauss-Seidel par bloc (BGS) qui consiste à sous itérer entre les deux sous problèmes comme suit

$$(12b) \quad X_{m,k+1}^{n+1} = M^* (X_m^n, X_{0,k}^{n+1}),$$

$$(12c) \quad U_{m,k+1}^{n+1} = \frac{X_{m,k+1}^{n+1} - X_m^n}{\Delta t},$$

$$(12d) \quad (U_{k+1}^{n+1}, P_{k+1}^{n+1}) = F^* ((U_k^{n+1}, P_k^{n+1}), U_{m,k+1}^{n+1}),$$

$$(12a) \quad X_{0,k+1}^{n+1} = X_0^n + U_{0,k+1}^{n+1} \Delta t.$$

Comme variable de contrôle nous avons choisi le déplacement à la surface libre. Cela implique, que si la différence entre deux déplacements successifs à la surface libre est inférieure à une référence, les itérations non linéaire sont arrêtées et on incrémente d'un pas de temps Δt . Afin de résoudre les systèmes d'équations linéarisés, nous utilisons le solver BiCGStab (Stabilized Bi-Conjugate Gradient méthode).

4. Résultats et discussions

Afin de valider la présente approche numérique, nous avons choisi de comparer nos résultats en premier lieu à ceux publiés par *Bang-Fuh et al.* [7] et *Nakayama et al.* [6] concernant le mouvement d'un liquide dans un réservoir rectangulaire subissant l'effet d'une excitation harmonique horizontale. L'élément de base qui a été sélectionné est un élément de Lagrange $P1/P1$, mixte et de forme triangulaire.

4.1. Analyse des ballottements de la surface libre d'un réservoir rectangulaire

4.1.1. Résultats préliminaires

La configuration étudiée est représentée sur la Figure 1.a. Concernant le sous-domaine fluide nous imposons la condition $U_n = 0$ aux frontières 1, 2 et 3.

A la surface libre, l'effet de la tension superficielle est négligé et la condition

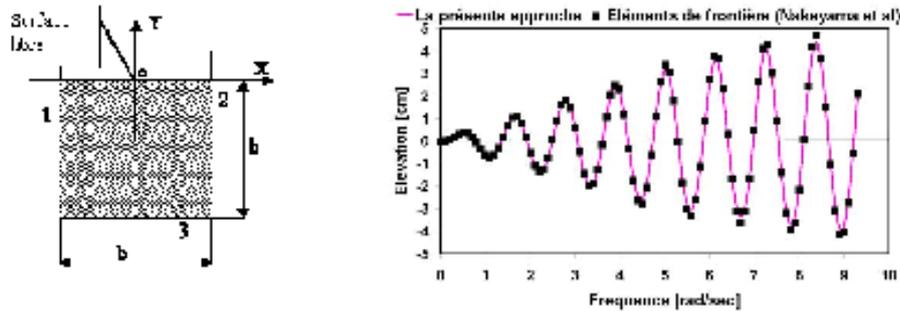
s'écrit $-PI + \mu(\nabla U + \nabla U^T)n = P_0I$. Pour le sous domaine pseudo élastique

(maillage), aux frontières 1 et 2, la condition est $X_{m,n} = 0$, à la frontière 3, $X_m = 0$ et à la surface libre $U_m n = U_0 n$.

La Figure 1.b représente l'évolution temporelle de l'élévation de la surface libre au point d'abscisse $X = +b/2$. Le réservoir est sujet à une accélération harmonique horizontale forcée définie par l'expression ci-dessous.

$$(13) \quad \ddot{X} = -X_0 \omega^2 \sin \omega t$$

Les paramètres sont choisis comme suit : $X_0 = 0.002\text{m}$ et $\omega = 5.5$ rad/sec.



a) Réservoir de liquide en deux dimensions ($h=0.6\text{m}$ et $b=0.9\text{m}$)

b) Evolution temporelle de l'élévation de la surface libre au point d'abscisse $X=+b/2$

Fig. 1 - Comparaison de l'élévation de la surface libre au point $X=+b/2$

L'effet de cette excitation harmonique se traduit dans la formulation par le terme de force de masse comme suit : $f_x = X$ et $f_y = -g$ où g représente l'accélération terrestre.

Nakayama et al. [6] dans leur approche numérique basée sur la méthode des éléments de frontière, ont supposés que l'écoulement est irrotationnel, que le fluide est incompressible et non visqueux. Ils ont introduit l'effet amortissant dû à la viscosité du fluide à travers une condition imposée à la surface libre au moyen d'un terme dite l'amortissement de Rayleigh. Les résultats du présent travail dans leurs globalités sont en bonne concordance avec ceux publiés par *Nakayama et al.* [6]. Néanmoins on estime que les légers décalages observés

sont dus à l'influence de la viscosité du fluide (Le fluide considéré est l'eau de viscosité dynamique $1,8 \cdot 10^{-3}$ Pa's et de masse volumique 1000 kg/m^3).

Il est à noter que pour le reste des calculs numériques entrepris, l'amplitude de l'excitation harmonique est prise $X_0 = 0.00186 \text{ m}$.

La Figure 2 montre le déplacement vertical du point à la paroi gauche de la surface libre pour deux fréquences d'excitation différentes. La solution analytique proposée dans [7] est aussi représentée sur la même figure. L'accord entre les résultats des deux approches est jugé satisfaisant. Les fréquences fondamentales ω_n sont calculées par l'expression [7] (12b) $\omega_n^2 = gk_n \tanh k_n$, où $k_n = (2n + 1)\pi / b$. Sous des fréquences d'excitation proche de la fréquence de résonance un phénomène de battement apparaît. La fréquence de l'enveloppe de l'amplitude de l'onde est $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega|$ et sa période est $T = 2\pi/\Delta\omega$.

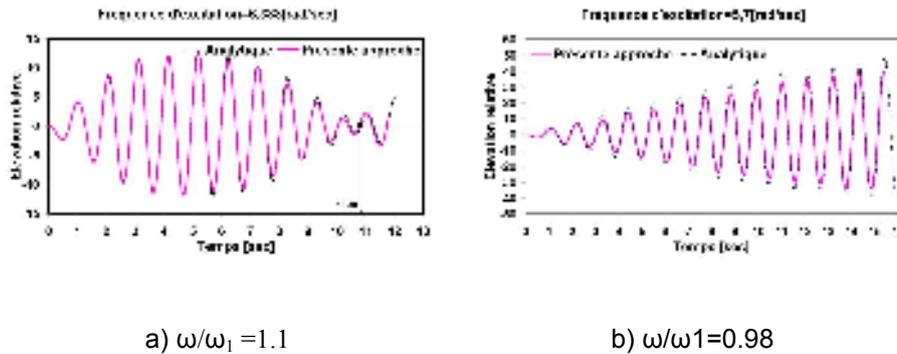


Fig. 2 - Comparaison de l'élévation de la surface libre au point $X=-b/2$

Nous avons la première fréquence de résonance du système étudié $\omega_1 = 5.762 \text{ rad/sec}$. Pour une fréquence d'excitation $\omega = 6.338 \text{ rad/sec}$ (voir figure 2.a) donc $\omega/\omega_1 = 1.1$, la période de l'enveloppe est $T=10.89 \text{ sec}$. Alors que pour une fréquence d'excitation $\omega=5.7 \text{ rad/sec}$ (voir figure 2.b) donc $\omega/\omega_1=0.98$, les amplitudes de l'onde de battement de la surface libre deviennent plus importantes et la période de l'enveloppe est $T=101.2 \text{ sec}$.

4.1.2. Influence de la fréquence d'excitation

La Figure 3 montre l'évolution temporelle de l'élévation de la surface libre pour deux valeurs de la fréquence d'excitation. Pour $\omega = 3 \text{ rad/sec}$, on constate que l'élévation au point se situant au milieu de la surface libre est nulle et que les élévations extrémales ont eu lieu aux points à $X = \pm b/2$. Dans le cas où $\omega=15 \text{ rad/sec}$, l'élévation au point du milieu géométrique de la surface libre reste nulle. Comme on constate aussi, la formation à la surface libre d'autres

points où l'élévation est de plus en plus réduite, que nous nommons nœuds. Pour la même valeur de la fréquence nous remarquons que les élévations extrémales ne sont plus aux points en contact avec les deux parois latérales du réservoir.

De telles investigations peuvent s'avérer en pratique très utile à titre d'exemple afin de définir *a priori* la position optimale d'un système de détection du niveau dans les réservoirs contenant des liquides toxiques ou autres.

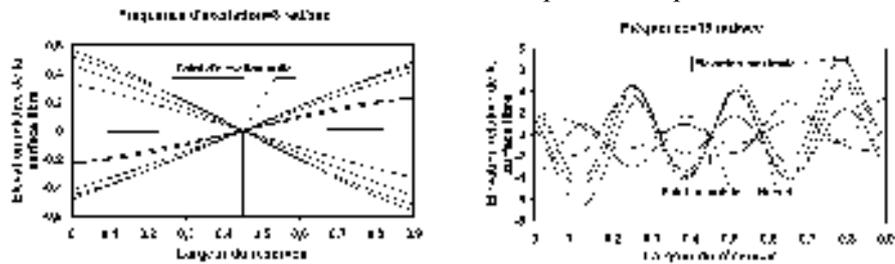


Fig. 3 - Evolution temporelle de l'élévation à la surface libre

La Figure 4 représente la réponse fréquentielle de la surface libre au point $X=-b/2$. En examinant ce dernier graphe, on peut vérifier un accord satisfaisant entre les valeurs des fréquences de résonance estimés théoriquement et ceux résultant de nos calculs numériques. On constate quatre pics consécutifs dans les valeurs de l'élévation relative maximale. Chacun d'eux correspond à une fréquence fondamentale de résonance. Le premier mode étant le plus dangereux où on remarque que l'élévation relative maximale dépasse 42.5.

Pour un problème similaire le nombre de Reynolds a été défini d'après [5] par $Re = U_0 h/\nu$ où U_0 la vitesse maximale de l'excitation extérieure est calculée par l'expression $U_0 = X_0 \omega$. Les plus grandes valeurs du nombre de Reynolds aura lieu pour $\omega = 16.5$ rad/sec qui est $Re=1584$. Cela vérifie que l'hypothèse d'un écoulement laminaire est toujours vérifiée.

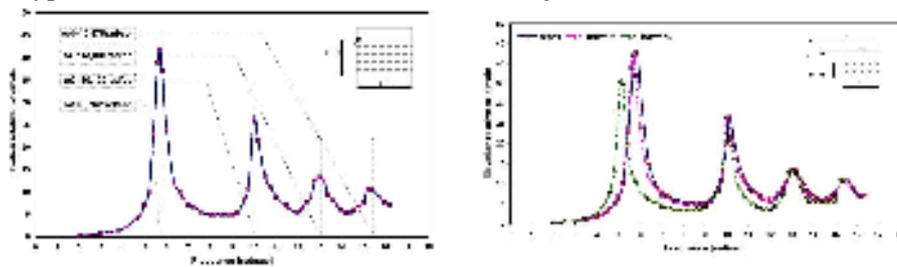


Fig. 4 - Réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre au point d'abscisse $X=-b/2$

4.1.3. Influence de la hauteur relative de la colonne du liquide [h/b]

Dans cette partie de notre investigation numérique, nous nous intéressons à l'effet de la hauteur relative de la colonne du liquide sur le comportement vibratoire des réservoirs. La Figure 5 représente la réponse fréquentielle de la surface libre à $X = -b/2$ pour différentes hauteurs relatives de la colonne d'eau. L'élévation extrême à la première fréquence fondamentale augmente proportionnellement à la hauteur relative de la colonne du liquide. Mais cette dépendance s'atténue quand H/L s'approche de l'unité. Cela est dû au fait que c'est seulement les parties supérieures de la colonne d'eau qui contribuent dans le mouvement de ballottement de la surface libre. Pour les autres fréquences de résonance, le mouvement de la surface libre est peu sensible aux changements de la hauteur de la colonne du liquide.

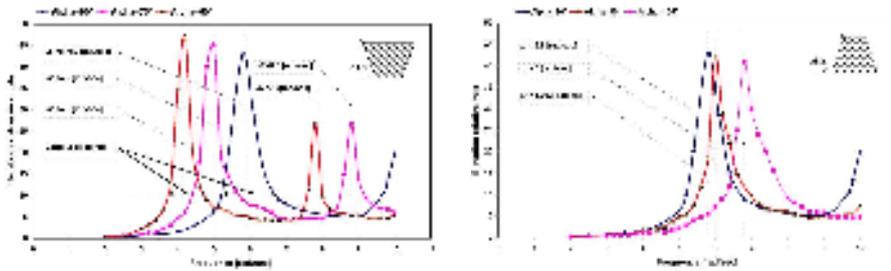


Fig. 5 - Réponse fréquentielle de l'élévation relative maximale à la surface libre au point d'abscisse $X = -b/2$ pour différentes hauteurs relatives de la colonne du liquide

4.2. Influence de l'inclinaison des parois latérales

En variant l'angle d'inclinaison des parois latérales nous modifions la géométrie du domaine fluide et par conséquent la réponse vibratoire du réservoir est affectée. Comme le montre la Figure 5, nous constatons que la première fréquence fondamentale est proportionnelle à l'angle d'inclinaison. Pour un angle de 60° la fréquence $\omega_1 = 4.2$ rad/sec, pour 75° la fréquence $\omega_1 = 4.9$ rad/sec, pour un réservoir rectangulaire nous avons $\omega_1 = 5.762$ rad/sec, pour 95° la fréquence $\omega_1 = 6$ rad/sec et pour 105° la première fréquence de résonance est $\omega_1 = 6.8$ rad/sec. Par contre l'élévation maximale diminue en augmentant l'angle d'inclinaison des parois latérales. Cette atténuation des élévations à la surface libre est due au fait qu'en augmentant l'angle d'inclinaison nous diminuons la quantité de liquide dans les couches supérieures du bloc fluide qui ont la plus grande contribution sur le ballottement de la surface libre.

Nous remarquons aussi que la valeur de la deuxième fréquence fondamentale évolue de la même façon que la première en fonction de l'angle d'inclinaison des parois.

Dans cette étude, on définit la largeur de bande comme étant la largeur du domaine de fréquence qui correspond à des élévations relatives maximales supérieures à 10. On constate que la largeur de bande augmente quand l'angle d'inclinaison augmente dans l'intervalle $[60^\circ, 90^\circ]$. Alors qu'elle est peu sensible pour des angles variant de $[90^\circ, 105^\circ]$.

5. Conclusions

En utilisant la méthode des éléments finis stabilisée dite de Galerkin least square (GLS) et les équations de Navier Stokes en formulation ALE, la réponse dynamique d'un réservoir de liquide sous l'influence d'une excitation harmonique et horizontale a été étudiée. Pour le cas d'un réservoir de forme rectangulaire, les résultats de la présente approche ont été vérifiés par rapport aux résultats numériques et analytiques trouvés dans la littérature. L'influence de la fréquence d'excitation, de la hauteur de la colonne du liquide et de l'inclinaison des parois latérales ont été examinés numériquement.

A partir de l'étude paramétrique entreprise, nous avons pu déduire que :

1) La première fréquence de résonance ainsi que le pic de l'élévation relative maximale varient proportionnellement à la hauteur relative de la colonne du liquide.

2) Pour la plage d'angle $[60^\circ, 105^\circ]$, on remarque que les fréquences de résonance varient proportionnellement à l'angle d'inclinaison des parois latérales.

3) L'élévation relative maximale est inversement proportionnelle à l'angle d'inclinaison des parois.

4) La largeur de bande comme nous l'avons définie augmente quand l'angle d'inclinaison s'accroît surtout pour des angles variant dans l'intervalle $[60^\circ, 90^\circ]$.

La caractérisation et l'étude de l'influence des différents paramètres affectant le comportement vibratoire des réservoirs sont d'une très grande utilité en pratique. Cela peut orienter les décisions entreprises lors la phase de conception selon les conditions du problème étudié. Il est à noter que la méthodologie numérique entreprise dans cette étude reste valable pour l'étude des vibrations de réservoir de forme plus complexe et subissant l'effet de divers excitations extérieures.

Reçue, le 7 juillet 2008

¹ URCA/GRESPI/Laboratoire de Thermomécanique,
Faculté des Sciences, BP 1039
51687 Reims Cedex 2, France

² Laboratoire LEAP, Université Mentouri Constantine, Algérie

³ Université Technique „Gh. Asachi”, Jassy, Chaire d'Installations dans les bâtiments

BIBLIOGRAPHIE

1. Akyildiz H., Unal E., *Experimental investigation of pressure distribution on rectangular tank due to the liquid sloshing*, Ocean Engineering, **32**, 1503-1516, 2005.
2. Cho J. R., Lee H. W., Ha S. Y., *Finite element analysis of resonant sloshing response in 2D baffled tank*, Journal of Sound and Vibration, **288**, 829-845, 2005.
3. Faltinsen M., *A nonlinear theory of sloshing in rectangular tanks*, Journal of Ship Research, **18**, 4, 224-241, 1974.
4. S. Babu S., Bhattacharyya S. K., *Finite element analysis of fluid-structure interaction effect on liquid retaining structures due to sloshing*, Computers & Structures, **59**, 6, 1165-1171, 1996.
5. Choun Y. S., Chung-Bang Yun, *Sloshing characteristics in rectangular tanks with a submerged block*, Computers & Structures, **61**, 3, 401-413, 1996.
6. Nakayama T., Washizu, *The boundary element method applied to the analysis of two-dimensional nonlinear sloshing problems*, International Journal for Numerical methods in engineering, **17**, 1631-1646, 1981.
7. Chen B. F., Nokes R., *Time-independent finite difference analysis of fully nonlinear and viscous fluid sloshing in a rectangular tank*, Journal of Computational Physics **209**, 47-81, 2005.
8. Cho J. R., Lee S. Y., *Dynamic analysis of baffled fuel-storage tanks using the ALE finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, **41**, 185-208, 2003.
9. Wall W. A., Genkinger S., Ramm E., *A strong partitioned approach for fluid-structure interaction with free surfaces*, Computers & Fluids, **36**, 169-183, 2007.
10. Donea J., Huerta A., Ponthot J.-Ph and Ferran R., *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods*, Encyclopedia of computational Mechanics, Volume 1 : Fundamentals, John Wiley & Sons, 2004.
11. Kamel Z., *Simulation numérique des problèmes d'interactions fluide-structure appliqués au domaine du bâtiment et génie civil*, thèse de doctorat, Université Paris 6 – Pierre et Marie Curie, 15 Décembre 2005.
12. Masud A., *A space-time finite element method for fluid-structure interaction*, Ph. D. Dissertation, Stanford University, 1993.
13. Xu Z., Accorsi M., *Finite element mesh update methods for fluid-structure interaction simulations*, Finite Elements in Analysis and Design, **40**, 9-10, 1259-1269, 2004.
14. Jean D. and Huerta A., *Finite Element Methods for flow Problems*, Wiley, 2003.

15. Franca L.P., Frey S.L., Hughes J.T.R., *Stabilized finite element methods: I. Application to advective-diffusive model*, Comput. Methods Appl. Mech Engrg, **95**, **2**, 253-276, 1992.